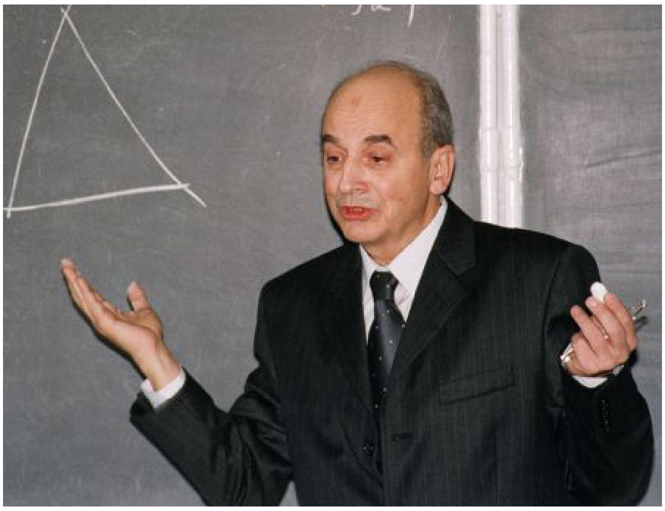
МАТСЕЛФИ



Математика – логика естествознания, единая наука об особых доказательных формах мышления как количественных, так и качественных.

Функциональный анализ возник на стыке геометрии, алгебры и классических исчислений. Необыкновенно быстро он стал естественным языком как многих традиционных разделов непрерывной математики и приближенных методов анализа, так и принципиально новых технологий теоретической физики и наук социальной сферы, прежде всего экономики и управления.

Наибольший интерес для меня представляют пограничные разделы составляющих функционального анализа и математической логики, модернизация теоретических методов социализации задач с неединственным решением на основе современных идей теории моделей.

Традиции функционального анализа были имплантированы в Сибирь С.Л. Соболевым и Л.В. Канторовичем. Их тезис о единстве функционального анализа и прикладной математики был, есть и должен оставаться впредь фирменным знаком отечественной математической школы. Таково мое глубокое убеждение.

Главные направления моих исследований – функциональный анализ, нестандартные методы анализа, приложения к геометрии и оптимизации. Здесь эти направления названы в порядке значимости. Все они с момента появления в сфере моих интересов из нее не выходят, но их место в работе и время, уделяемое каждому из них, непостоянно. Буду по возможности придерживаться хронологии.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

С помощью идей линейного программирования, предложенного Л. В. Канторовичем, удалось выделить классы экстремальных задач оптимального размещения фигур, которые никаким классическим методам не поддавались в принципе. Подобные задачи было предложено решать так, как это делается в программировании, – переходом к двойственной задаче. Последняя оказалась разрешимой с помощью техники смешанных объемов, развития идей двойственности Г. Минковского и некоторого обобщения одной конструкции в теории меры, принадлежащей Ю.Г. Решетняку [1]. Найденные описания новых классов неравенств над выпуклыми поверхностями в сочетании с техникой поверхностных мер А.Д. Александрова [2] позволили свести к линейным программам задачи изопериметрического типа с произвольным числом ограничений, к которым неприменимы приемы симметризации. Фактически был предъявлен обширный класс геометрических вариационных задач, решения которых можно выписать в явном виде за счет превращения их в выпуклые программы в подходящих функциональных пространствах[1].

Наиболее наглядное и значительное продвижение здесь связано с изучением обобщений задачи П.С. Урысона о максимизации объема поверхности при заданном интеграле ее ширины. По классическому результату П.С. Урысона, который он опубликовал в год своей кончины (1924, [5]), – это шар, что следует из подходящих соображений симметрии. В 1970-е годы в качестве модели для функционально-аналитических методов была поставлена и рассмотрена «внутренняя» задача Урысона: при заданном интеграле ширины максимизировать объем фигуры в конечномерном пространстве, лежащей внутри данной (например, симплекса). Принципиально новая сложность здесь в том, что никакие соображения симметрии в этой и аналогичных задачах не проходят. Оказалось возможным решать подобные задачи в некотором обобщенном смысле – «по модулю» теоремы А.Д. Александрова о восстановлении поверхности по кривизне. Для задачи Урысона в многограннике решением будет мера Лебега с добавлением точечных нагрузок в нормалях к граням исходно-

[1] *Часть таких результатов вошла в обзор [3]. Концепция H-выпуклости, предложенная в этой работе, считается основополагающей в многочисленных исследованиях по обобщениям выпуклости и поиску схем глобальной оптимизации (см., в частности, [4]).*

го многогранника. Внутренняя изопериметрическая задача даже в тетраэдре в общие схемы не вполне укладывается.

При размерности $N = 3$ в 1995 г. А.В. Погорелов в одной из своих последних работ [6] нашел форму «мыльного пузыря» в тетраэдре в том же обобщенном смысле – ею оказалась обкатка шаром упомянутого выше решения внутренней задачи Урысона. Общий случай остается открытым. В последние годы довольно много работ в мире написано о двойных пузырях. Эта проблематика также близка к описанным идеям.

2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой области функционального анализа чрезвычайно важны проблемы, связанные с эвристическим принципом Л. В. Канторовича.

Уже в первой своей работе в новом направлении, датированной 1935 г. [7], Л. В. Канторович писал: «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Следует подчеркнуть, что в определение линейного полуупорядоченного пространства Л.В. Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты. Роль своих K-пространств Л.В. Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана – Банаха. Оказалось, что в этом ключевом факте функционального анализа можно реализовать новый эвристический принцип – заменить вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы – операторами со значениями в таком пространстве, не нарушив справедливость числовых утверждений.

Эвристический принцип Л.В. Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей. Еще в середине прошлого века предпринимались попытки формализации эвристического принципа Л.В. Канторовича. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов i-пространства. Объяснить природу эвристического принципа Л.В. Канторовича удалось только через 50 лет после его формулировки с помощью методов нестандартного моделирования.

Абстрактные идеи Л.В. Канторовича в области *K*-пространств связаны с линейным программированием и приближенными методами анализа. Сам он писал о нераскрытых возможностях своей теории и недооценке этой ветви функционального анализа для экономики, подчеркивая, что «в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды».

Вопрос о границах применимости теоремы Хана – Банаха – Канторовича, эквивалентный описанию сферы возможных обобщений линейного программирования, был весьма актуален в середине 1970–1980-х годов. Общеизвестно, что линейные программы удобство свое теряют, если искать только целые решения. С.Н. Черников [8] перенес линейное программирование с чисел на некоторые кольца (типа рациональных чисел). Немалый интерес был проявлен в мировой литературе к вопросу о том, в каких собственно алгебраических системах можно идеи Л.В. Канторовича использовать в полном объеме. Удалось дать окончательный вариант ответа – описать абстрактные – Банаха (см. [9]). Такими оказались пространства Канторовича, рассматриваемые как модули над некоторыми «обширными» алгебрами своих ортоморфизмов. Этот результат имел некоторый резонанс и для теоретических основ математической экономики в связи с гипотезой «делимости продуктов».

Один из очень частных результатов этого цикла – теорема о характеризации решеточных гомоморфизмов – неожиданно привлек внимание специалистов – его стали передоказывать и включать в книги по векторным решеткам как «теорему Кутателадзе» (см. [10, p. 114]). Много позже с помощью булевозначных моделей удалось объяснить, что найденные общие модули по сути и есть плотные подполя поля вещественных чисел в подходящей нестандартной модели теории множеств.

Были предложены неожиданные обобщения теоремы Крейна – Мильмана на некомпактные множества, и в этой связи довольно много работ было выполнено по развитию методов границ Шоке в векторных решетках (см. обзор [11]).

В рамках упорядоченных векторных пространств удалось несколько продвинуться в изучении приложений теории Шоке к некоторым проблемам современной теории потенциала: изучить связь задачи Дирихле с бесконечномерными геометрическими симплексами Бауэра, описать новые объекты – супремальные генераторы пространств функций, полезные при исследовании сходимости аппроксимаций положительными операторами. Можно отметить, что концепция супремального генерирования, основанная на вычислительной простоте нахождения максимума двух чисел, оказалась близкой к некоторым идеям идемпотентного анализа, возникшего несколько позже в работах В.П. Маслова и его учеников (см., в частности, [12]).

3. НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Большой цикл работ относится к выпуклому анализу, одному из основных разделов прикладного нелинейного анализа. Выпуклый анализ – это наука об исчислении неравенств. Понятию выпуклого множества нет и 150 лет, а сам выпуклый анализ как математическая дисциплина существует чуть более полувека. Решения систем линейных неравенств – это то же самое, что выпуклые множества, которые могут быть охарактеризованы своими калибрами, опорными функциями или распределением кривизн. Функциональный анализ немыслим без понятия выпуклости, так как наличие ненулевых непрерывных линейных функционалов обеспечено в том и только в том случае, если в пространстве имеются не совпадающие с ним непустые открытые выпуклые множества.

Выпуклые поверхности имеют очень простые контингенции, а выпуклые функции в естественном смысле дифференцируемы по направлениям и их производные нелинейны лишь в немногих точках. Тем не менее эти крайние в прямом и переносном смысле слова точки особенно важны. Учет локального поведения возможных изломов в крайних точках без ограничений на размерность объемлющего пространства — предмет субдифференциального исчисления. Здесь удалось найти наиболее общие и полные правила такого рода в виде явных формул для пересчета значений и решений самых общих выпуклых экстремальных задач при сохраняющих выпуклость заменах переменных.

Ключевым стал принципиально новый прием представления произвольного выпуклого оператора в виде результата аффинной подстановки в конкретный сублинейный оператор (из семейства, нумерующего кардиналы). Базовые результаты этого направления были опубликованы в [13]. В литературе используется термин *канонический оператор Кутателадзе* (см. [14, с. 123–125], [15, с. 92]). На основе указанных правил был установлен принцип Лагранжа для нового класса задач векторной оптимизации и предложена теория выпуклого программирования. Задача состоит в поиске точки, в которой значение (возможно, векторнозначной) функции отличается от экстремума не больше, чем на наперед заданный положительный вектор невязоке. Ограничения тоже заданы с какими-то оценками точности порядка ε. Хотя стандартная техника дифференциального исчисления тут никак не работает, новые методы субдифференциального исчисления множество таких задач решили. Эти результаты вызвали большой резонанс, вошли в монографии, неоднократно передоказывались за рубежом со ссылками на отечественный приоритет. В литературе используется термин *Kutateladze's approximate solutions (*см., например, [16]). Много позже с помощью инфинитезимального анализа удалось предложить приемы, связанные с отказом от сложного пересчета невязок. Для этого невязку надо мыслить себе актуально бесконечно малой величиной, что невозможно в рамках стандартных теоретико-множественных представлений.

Приложения к негладкому анализу связаны с изучением поведения контингенций общих, не обязательно выпуклых соответствий. Удалось найти ряд новых правил подсчета разного типа касательных и односторонних производных по направлениям. Значительные технические упрощения и продвижения здесь были достигнуты также за счет привлечения техники теории моделей.

Экстремальные задачи, в огромном количестве изученные в разных разделах математики, используют только скалярные целевые функции. Многоцелевые постановки задач возникли сравнительно недавно, причем вне математики, что объясняет значительный разрыв в сложности и эффективности математических средств, разработанных для одноцелевых и многоцелевых задач. В этой связи представляется целесообразным расширить внутриматематический запас задач векторной оптимизации. Сравнительно недавно автору довелось рассмотреть класс геометрически содержательных задач векторной оптимизации, решение которых можно указать достаточно явно в терминах условий на поверхностные функции. В качестве модельных примеров даны явные решения задач Урысона, усложненных условием уплощения в заданном направлении, требованиями симметрии или оптимизации выпуклой оболочки нескольких фигур (см. [17], [18]).

4. НОВЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В последние десятилетия стал весьма привлекательным пограничный раздел математики и логики – нестандартные методы анализа. Здесь ведется разработка новых возможностей математического моделирования, открывающих значительные перспективы для осмысления и решения разнообразных теоретических и практических задач.

Модель математической теории принято называть нестандартной, если отношение принадлежности внутри модели получает иную интерпретацию, чем в теории множеств (Л. Хенкин). Простейший пример нестандартного моделирования – это классический прием изображения чисел точками.

Новые методы анализа представляют собой адаптацию техники нестандартных моделей теории множеств к задачам анализа. Здесь выделяются две основные технологии: инфинитезимальный анализ, известный также как робинсоновский нестандартный анализ, и булевозначный анализ.

Инфинитезимальный анализ А. Робинсона возник в 1960 г. и характеризуется использованием актуальных бесконечно больших и бесконечно малых величин, которые около тридцати лет были запрещены в математике XX века. Можно сказать, что в нем осуществлено известное возвращение на новом этапе к классическому анализу бесконечно малых. Современные публикации в этом направлении в основном делятся на две группы. Одна – наиболее многочисленная – использует инфинитезимальный анализ как средство «убивания кванторов» – упрощения понятий и доказательств обычных теорем. Другая – менее многочисленная, но более значимая – ищет возможности, недоступные стандартным методам (то есть развивает технологии, из описаний которых новые понятия исключить нельзя). Здесь следует назвать разработку новых схем замены бесконечных объектов конечными: нестандартные оболочки, меры Леба, гиперприближения и т. п. Некоторая часть таких работ осуществлена в Новосибирске. В частности, ко второй группе относятся результаты по инфинитезимальному программированию [19].

Булевозначный анализ характеризуется использованием таких терминов, как булевозначный универсум, спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, булевы множества и изображения. Техника здесь много сложнее инфинитезимального анализа, и ей владеют пока немногие. Становление этого направления математической логики было связано с работами П. Дж. Коэна по независимости гипотезы континуума (1961 г.), осмысление которых привело Д. Скотта, Р. Соловея и П. Вопенку к построению булевозначных моделей теории множеств.

Д. Скотт предвидел роль булевозначных моделей в математике еще в 1969 г. (см. [20]): «Следует спросить – интересны ли нестандартные модели помимо доказательства независимости? Иначе говоря, представляют ли они хоть какой-либо математический интерес? Ответ обязан быть утвердительным, хотя пока мы не можем привести в пользу этого по-настоящему хорошие аргументы».

Г. Такеути одним из первых указал на роль этих моделей для функционального анализа (в гильбертовом случае) и предложил термин булевозначный анализ (см. [21]). Модели инфинитезимального анализа формально могут рассматриваться как простейшие разновидности булевозначных моделей.

Развитие булевозначного анализа за последние двадцать лет привело к принципиально новым идеям и результатам во многих разделах функционального анализа, прежде всего в области пространств Канторовича и алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер. Большая часть этих исследований связана с Новосибирском и Владикавказом (см. [22]–[25]). Можно сказать, что булевозначный анализ покинул пределы логики и стал разделом теории упорядоченных векторных пространств.

Новые возможности раскрыли особое значение расширенных – универсально полных – *K*-пространств. Каждое из них, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича действительно представляют собой разновидности моделей поля вещественных чисел, что подтвердило эвристические идеи Л.В. Канторовича. Этот замечательный результат принадлежит Е.И. Гордону [24].

Адаптация нестандартных моделей к задачам анализа занимает большое место в моих занятиях и исследованиях моих ближайших коллег. Была развита особая техника спусков и подъемов, даны критерии экстенсиональных алгебраических систем, предложена теория циклических монад, развиты подходы к комбинированию нестандартных моделей. На этой основе были решены некоторые задачи разной природы из геометрического и прикладного функционального анализа: дана принципиально новая классификация односторонних приближений кларковского типа для произвольных множеств и установлены соответствующие правила подсчета инфинитезимальных касательных; предложен нестандартный подход к приближенному решению выпуклых программ в форме теории инфинитезимального программирования, найдены новые общие формулы проектирования на главные компоненты в пространствах регулярных операторов, свободные от принятых в литературе условий на порядково сопряженное пространство и т. п.

Можно отметить также новый метод изучения некоторых классов ограниченных операторов по свойствам ядер их слоев, основанный на применении эвристического принципа Л.В. Канторовича к общеизвестному факту о восстановлении функционала по любой его гиперплоскости с точностью до скалярного множителя. В 2005 г.

это позволило описать операторные аннуляторы пространств Гротендика в [26]. В 2010 г. удалось предложить операторные формы классической леммы Фаркаша в теории линейных неравенств, вернувшись к истокам линейного программирования (см. [27], [28]).

Помимо приложений в этой сфере особенно важна разработка комбинированных методов анализа, сочетающих булевозначные и инфинитезимальные схемы. Тут мыслимы по меньшей мере два подхода. Один состоит в изучении стандартной булевозначной модели в универсуме внутренних множеств Э. Нельсона или в универсуме внешних множеств Т. Каваи. Инфинитезимали при этом спускаются из некоторого внешнего мира. Приложения требуют и другого подхода, состоящего в обнаружении инфинитезималей внутри булевозначных универсумов. Эти два подхода к построению комбинированных моделей были несколько развиты, однако синтез технических приемов различных версий нестандартного анализа все еще остается во многом открытой проблемой.

Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением разработки синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности. Теперь мы можем использовать актуальные бесконечно большие и малые величины, превращать матрицы в числа, пространства в прямые, не компакты в компакты и сколько еще остается для нас неизведанного.

Классический функциональный анализ не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Далеко не все теоретики и прикладники уже поняли их значение и ими овладели. Однако пути назад в науке нет – современные методы навсегда вошли в основное тело математики и непременно станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.

С.С. Кутателадзе,
д. ф.-м. н., профессор Института математики им. С.Л. Соболева (г. Новосибирск).

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю.Г. *О длине и повороте кривой и о площади поверхности// Дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. Ленинград: Ленингр. гос. ун-т, 1954.*
2. Александров А.Д. *Избранные труды. Т. 1: Геометрия и приложения. – Новосибирск: Наука, 2006.*
3. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. *Двойственность Минковского и ее приложения // Успехи мат. наук. 1ф972. Т. 27, № 3. С. 127–176.*
4. Singer I. *Abstract Convex Analysis. – New York: John Wiley, 1997.*
5. Урысон П.С. *Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 477–486.*
6. Погорелов А.В. *Погружение «мыльного пузыря» внутрь тетраэдра // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 90–93.*
7. Канторович Л.В. *О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4, № 1–2. С. 11–14.*
8. Черников С.Н. *Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968.*
9. Кутателадзе С.С. *Модули, допускающие выпуклый анализ // ДАН СССР. Т. 252, № 4. 1980. С. 789–791.*
10. Aliprantis Ch., Birkinshaw Ow. *Positive Operators. – Orlando etc.: Academic Press, 1985.*
11. Кутателадзе С.С. *Границы Шоке в if-пространствах // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 107–146.*
12. Колокольцов В.Н., Маслов В.П. *Идемпотентный анализ как аппарат теории управления. I // Функц. анализ и его прил.1989. Т. 23, № 1. С. 1–14.*
13. Кутателадзе С.С. *Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 167–196.*
14. Рубинов А.М. *Сублинейные операторы и их приложения // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 4. С. 113–174.*
15. Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ // Анализ-2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 14, ВИНИТИ, М., 1987, С. 5–101.*
16. Gutierrez C, Jimenez B., Novo V. *On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization // Computational Optimization and Applications. 2006.Vol. 35. P. 305–324.*
17. Кутателадзе С.С. *Многоцелевые задачи выпуклой геометрии // Сибирский мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1123–1136.*
18. Kutateladze S.S. *Multiple criteria problems over Minkowski balls // J. Appl. Indust. Math. 2013. Vol. 7, No. 2. P. 208–214.*
19. Кутателадзе С.С. *Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сибирский мат. журнал. 1986. Т. 27, № 4, С. 84–92.*
20. Scott D. *Boolean models and nonstandard analysis. In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability, 87–92. New York: Holt, Rinehart & Winston of Canada Ltd, 1969.*
21. Takeuti G. *Two Applications of Logic to Mathematics. – Tokyo and Princeton: Iwanami Publ. & Princeton University Press, 1978.*
22. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. *Введение в булевозначный анализ. – М.: Наука, 2005.*
23. Kusraev A.G., Kutateladze S.S. *Boolean Valued Analysis: Selected Topics. – Vladikavkaz: Southern Math. Inst., 2014.*
24. Гордон Е.И. *Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и if-пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.*
25. Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. *Инфинитезимальный анализ: избранные темы. – М.: Наука, 2011.*
26. Кутателадзе С.С. *О подпространствах Гротендика // Сибирский мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 620–624.*
27. Кутателадзе С.С. *Новая форма леммы Фаркаша // Сибирский мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 98–109.*
28. Кутателадзе С.С. *Полиэдральный принцип Лагранжа // Сибирский мат. журн. 2011. Т. 52, № 3. С. 615–618.*

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Президиум Владикавказского научного центра РАН горячо и сердечно поздравляет
Семена Самсоновича КУТАТЕЛАДЗЕ с 70-летием
и желает ему крепкого здоровья и долгих лет яркой творческой жизни!